Área de Publicação: Matemática

IRRACIONALIDADE DE *e*.

RESUMO

O número ***e*** é chamado de número de Euler em homenagem a Leonhard Euler e é a base dos logaritmos naturais. Esse número também é conhecido como número de Napier, constante de Néper ou número neperiano. A primeira referência à constante foi publicada na tabela de um apêndice de um trabalho sobre logaritmos de John Napier. No entanto, neste apêndice não se tem a constante propriamente dita, mas apenas uma simples lista de logaritmos naturais calculados a partir desta tabela. O número neperiano aparece sob várias vertentes na Matemática, por exemplo, no estudo de limites de sequências e séries de números reais; outro aspecto interessante é a irracionalidade dessa constante. Nos propomos neste trabalho a apresentar duas demonstrações, presentes na literatura, sobre a irracionalidade de ***e.*** Uma dessas demonstrações é obtida como consequência do Teorema dos intervalos encaixantes, o qual habitualmente se estuda em um curso introdutório de Análise Real.

PALAVRAS-CHAVE: Euler. Número de Euler. Intervalos Encaixantes. Irracionalidade

1. INTRODUÇÃO

Segundo [1], a primeira referência à constante ***e*** foi publicada na tabela de um apêndice de um trabalho sobre logaritmos de John Napier. No entanto, este apêndice não contém a constante propriamente dita, mas apenas uma simples lista de logaritmos naturais calculados a partir desta. O número ***e*** é chamado de número de Euler em homenagem a Leonhard Euler e é a base dos logaritmos naturais. Essa constante também é conhecida como número de Napier e número neperiano.

O número neperiano surge em várias situações na Matemática, como, por exemplo, no crescimento exponencial dos juros compostos e tal constante também aparece na Física em muitas aplicações. Nos propomos neste trabalho a apresentar duas demonstrações, presentes na literatura, da irracionalidade de ***e.*** Uma dessas demonstrações é obtida como consequência do Teorema dos intervalos encaixantes, o qual habitualmente se estuda em um curso introdutório de Análise Real. Já a outra demonstração é obtida através do estudo de Séries.

2. METODOLOGIA

Para o presente trabalho foram realizadas exposições em um workshop didático-pedagógico sobre temas estudados em inglês, tendo como base [3]. Assim, foram realizadas leituras em livros sobre o tema encontrado em [4]. Além disso, contamos com a orientação do tutor do grupo Pet-Matemática-UFCG, auxiliando no desenvolvimento do trabalho.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a primeira demonstração utilizaremos o *Critério de Leibniz,* vide [2].

Lema 1(Critério de Leibniz): Seja $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$ uma sequência decrescente de números reais positivos que converge para zero. Então a série alternada $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i a_i$ converge para um número S.

Donde vale,

$$a_1 - a_2 < S < a_1.$$

Primeira demonstração da irracionalidade de *e*:

Suponha $e = \frac{k}{m}$, com *k* e *m* inteiros positivos.

Pelo estudo de séries, vide [4], sabemos que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (I).$$

Então,

$$e^{-1} = \frac{m}{k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Rightarrow \frac{m}{k} - \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n>k} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Multiplicando ambos os lados da última desigualdade por $+k!$ ou $-k!$, dependendo da paridade de k, obtemos:

$$\pm(k-1)!\,m - \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{n!} k! = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} - \cdots \quad (II).$$

O lado esquerdo da equação *(II)*, chamaremos de um inteiro S. Por outro lado, a série alternada do lado direito da equação *(II)* converge para S, vide Lema 1.

Ainda utilizando o Lema 1, temos:

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} < S < \frac{1}{k+1} \quad (III).$$

Ou seja,

$$\frac{1}{k+2} < S < \frac{1}{k+1}.$$

Como não existe um inteiro entre essas frações, chegamos a uma contradição. Logo, ***e*** é irracional.

Lema 2 (Teorema dos Intervalos Encaixantes): Dada uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$, existe pelo menos um número real *c* tal $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vide [2].

Segunda demonstração da irracionalidade de *e*:

Sejam $I_n = [a_n, b_n]$ com $a_n = \frac{c_n}{n!}$ e $b_n = \frac{c_n+1}{n!}$, onde cada c_n é um número inteiro.

Tomemos,

$$\frac{c_n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}.$$

Por (I), temos:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Pelo (Lema 2) podemos afirmar que

$$\lim_{n\to\infty} |I_n| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n+1}{n!} - \frac{c_n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n!}\right| = 0,$$

Então $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ é um ponto, ou seja, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$.

Portanto, como $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, temos

$$\frac{c_n}{n!} \leq c \leq \frac{c_n}{n!} + \frac{1}{n!} \quad (IV).$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = e \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} + \frac{1}{n!} = e,$$

aplicando o Teorema do confronto em (IV), obtemos:

$$c = e \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{e\}.$$

Após provar esses resultados, vamos supor que ***e*** seja racional, isto é,

$$e = \frac{p}{q}, \text{com } p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } p,\ q > 0.$$

Assim,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \left\{\frac{p}{q}\right\}.$$

Logo,

$$C_n \leq \frac{pn!}{q} \leq C_n + 1,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomando $n = q$, concluímos que:

$$C_q \leq \frac{pq(q-1)!}{q} \leq C_q + 1 \Longrightarrow C_q \leq p(q-1)! \leq C_q + 1.$$

Assim, chegamos a uma contradição, pois não existe um número inteiro, entre qualquer número inteiro e seu sucessor. Portanto, e é irracional.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao término do trabalho foi possível demonstrar a irracionalidade de uma constante muito conhecida na matemática, o número neperiano, de duas maneiras distintas. Na primeira delas utilizamos o estudo de séries para concluir a irracionalidade dessa constante. Já na segunda, utilizamos de um importante resultado na Análise Real, que é o Teorema dos Intervalos Encaixantes, uma aplicação da Análise a um resultado comum do Ensino Médio, obtendo à mesma conclusão.

REFERÊNCIAS

1. EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática* / Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.
2. LIMA, Elon Lages. *Análise Real.* 11. ed, vol 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
3. ROTMAN. Joseph J. *Journey Into Mathematics:* An Introduction to Proofs. Mineola, New York. Dover, 2007.
4. SONDOW, Jonathan. *A Geometric Proof that e is Irrational and a New Measure of its Irrationality.* Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/9a85/24f8922487fdde2f9e81ee909d789bd4624a.pdf > Acesso em: 15/09/07.
5. THOMAS, George B. *Cálculo*. 11. ed, vol 2; tradução: Thelma Guimarães e Leila Maria V. Figueiredo. São Paulo: Addison Wesley, 2009.